

Лекция 10

Методы численного решения задач электродинамики

Вопросы лекции

1. Обзор задач электродинамики и методов их решения.
2. Метод моментов (ММ).
3. Метод конечных элементов (МКЭ).
4. Метод конечных разностей во временной области (МКРВО)

Вопрос 1.

**Обзор задач электродинамики и
методов их решения**

Электродинамика — раздел физики, изучающий
электромагнитное поле

Электродинамика лежит в основе: радиотехники,
электротехники, различных отраслей связи и радио.

Чаще всего под термином электродинамика понимается
классическая электродинамика, описывающая только
непрерывные свойства электромагнитного поля посредством
системы уравнений Максвелла

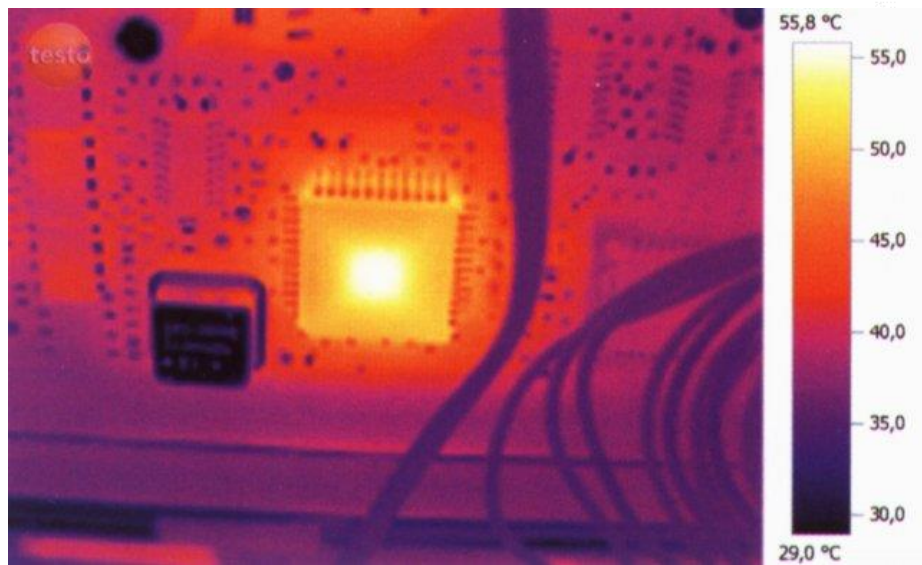
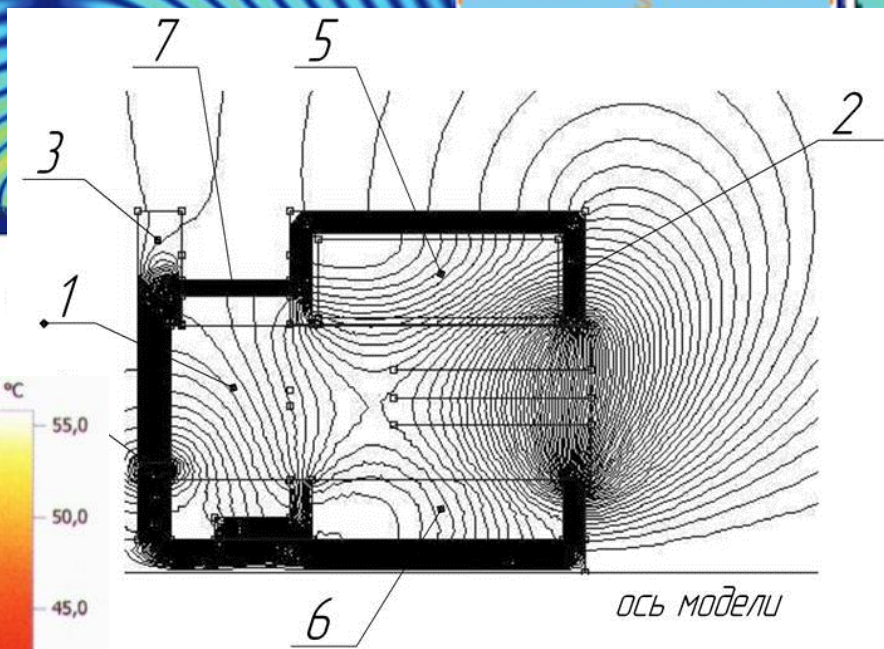
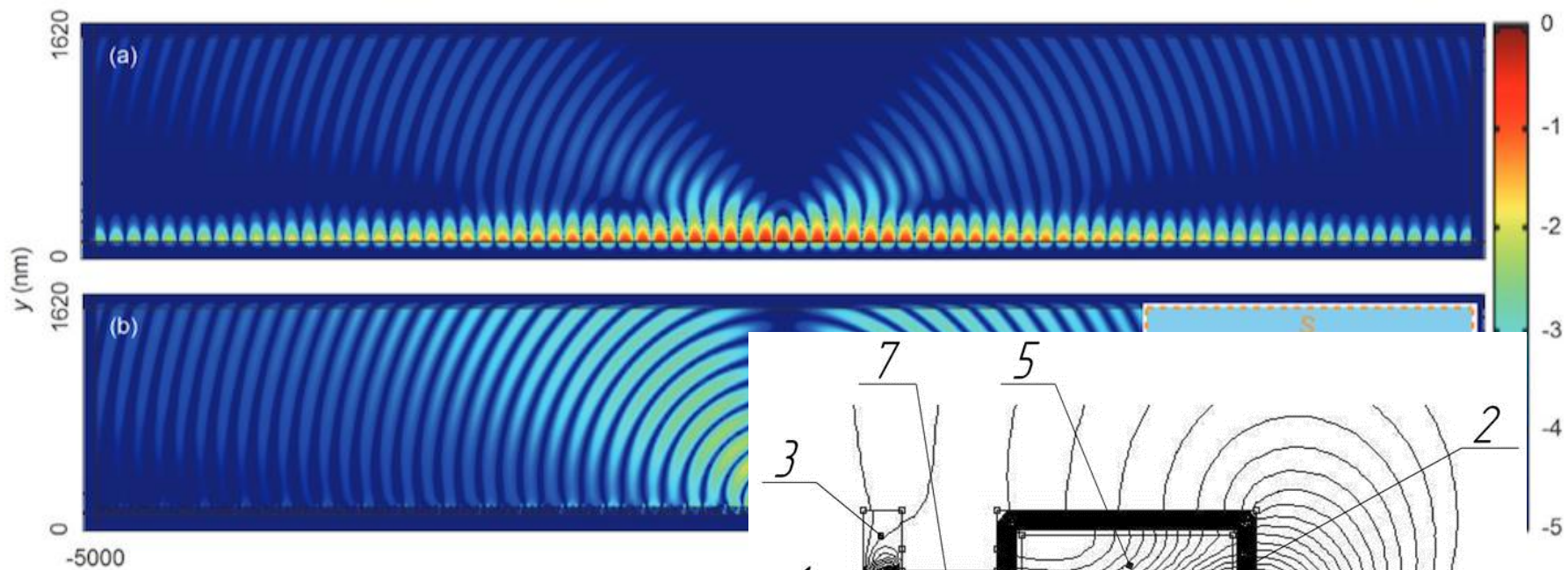
Специальные разделы электродинамики

Электростатика описывает свойства статического (не меняющегося со временем) электрического поля и его взаимодействия с электрически заряженными телами (электрическими зарядами), которые также неподвижны.

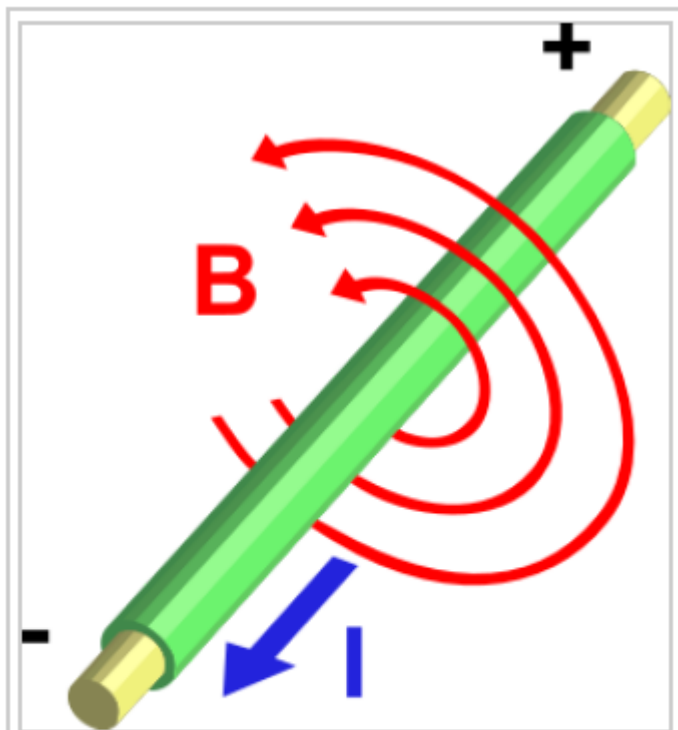
Магнитостатика исследует постоянные токи (и постоянные магниты) и постоянные магнитные поля (поля не меняются во времени), а также их взаимодействие.

Электродинамика сплошных сред рассматривает поведение электромагнитных полей в сплошных средах.

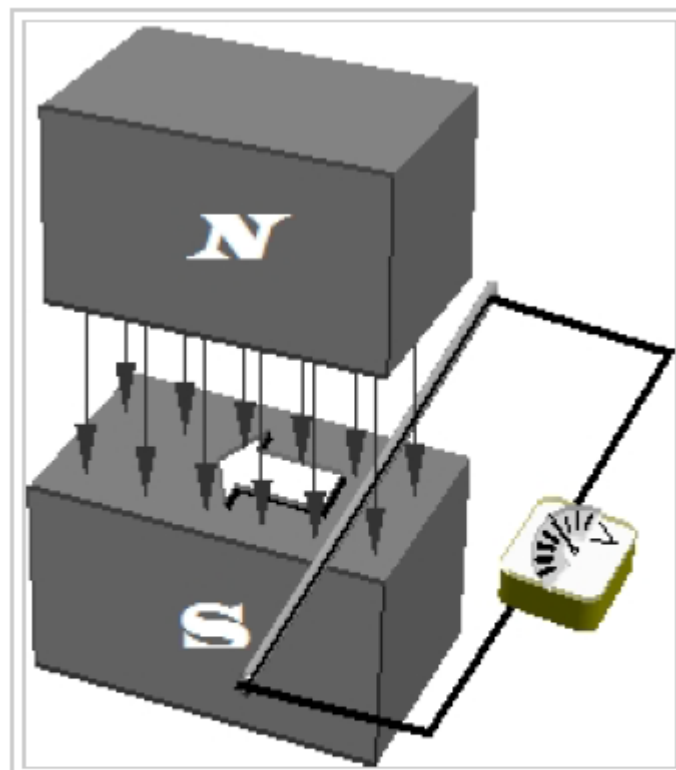
Релятивистская электродинамика рассматривает электромагнитные поля в движущихся средах.



Уравнения Максвелла — система уравнений в дифференциальной или интегральной форме, описывающих электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах.



Электрический ток создаёт магнитную индукцию (закон Ампера)



Переменный поток магнитного поля создаёт электрическое поле (закон Фарадея)

Дифференциальная форма уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла представляют собой в векторной записи систему из четырёх уравнений, сводящуюся в компонентном представлении к восьми (два векторных уравнения содержат по три компоненты каждое плюс два скалярных^[28]) линейным дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка для 12 компонент четырёх векторных функций (**D**, **E**, **H**, **B**):

Название	СГС	СИ	Примерное словесное выражение
Закон Гаусса	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Электрический заряд является источником электрической индукции.
Закон Гаусса для магнитного поля	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Не существует магнитных зарядов. ^[~ 1]
Закон индукции Фарадея	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле. ^[~ 1]
Теорема о циркуляции магнитного поля	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле

Введённые обозначения:

- ρ — объёмная плотность стороннего электрического заряда (в единицах СИ — Кл/м³);
- \mathbf{j} — плотность электрического тока (плотность тока проводимости) (в единицах СИ — А/м²); в простейшем случае — случае тока, порождаемого одним типом носителей заряда, она выражается просто как $\mathbf{j} = \mathbf{u}\rho_1$, где \mathbf{u} — (средняя) скорость движения этих носителей в окрестности данной точки, ρ_1 — плотность заряда этого типа носителей (она в общем случае не совпадает с ρ)^[29]; в общем случае это выражение надо усреднить по разным типам носителей;
- c — скорость света в вакууме (299 792 458 м/с);
- \mathbf{E} — напряжённость электрического поля (в единицах СИ — В/м);
- \mathbf{H} — напряжённость магнитного поля (в единицах СИ — А/м);
- \mathbf{D} — электрическая индукция (в единицах СИ — Кл/м²);
- \mathbf{B} — магнитная индукция (в единицах СИ — Тл = Вб/м² = кг·с⁻²·А⁻¹);
- ∇ — дифференциальный оператор набла, при этом:

$\nabla \times \mathbf{E} \equiv \text{rot } \mathbf{E}$ означает ротор вектора,

$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \text{div } \mathbf{E}$ означает дивергенцию вектора.

Приведённые выше уравнения Максвелла не составляют ещё полной системы уравнений электромагнитного поля, поскольку они не содержат свойств среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Соотношения, связывающие величины \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{j} и учитывающие индивидуальные свойства среды, называются материальными уравнениями.

Материальные уравнения устанавливают связь между **D**, **H** и **E**, **B**. При этом учитываются индивидуальные свойства среды. На практике в материальных уравнениях обычно используются экспериментально определяемые коэффициенты (зависящие в общем случае от частоты электромагнитного поля), которые собраны в различных справочниках физических величин^[37].

- В слабых электромагнитных полях, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени, в случае изотропных, неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред справедливо приближение, в котором поляризуемость и намагниченность линейно зависят от приложенных полей:

СГС	СИ
$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$	$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$

где введены безразмерные константы: χ_e — диэлектрическая восприимчивость и χ_m — магнитная восприимчивость вещества (в системе единиц СИ эти константы в 4π раз больше, чем в гауссовой системе СГС). Соответственно, материальные уравнения для электрической и магнитной индукций записываются в следующем виде:

СГС	СИ
$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = (1 + 4\pi\chi_m) \mathbf{H}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H},$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость, μ — относительная магнитная проницаемость. Размерные величины $\varepsilon_0 \varepsilon$ (в единицах СИ — Ф/м) и $\mu_0 \mu$ (в единицах СИ — Гн/м), возникающие в системе СИ, называются абсолютная диэлектрическая проницаемость и абсолютная магнитная проницаемость соответственно.

Интегральная форма уравнений Максвелла

При помощи формулы Остроградского — Гаусса и теоремы Стокса дифференциальным уравнениям Максвелла можно придать форму интегральных уравнений:

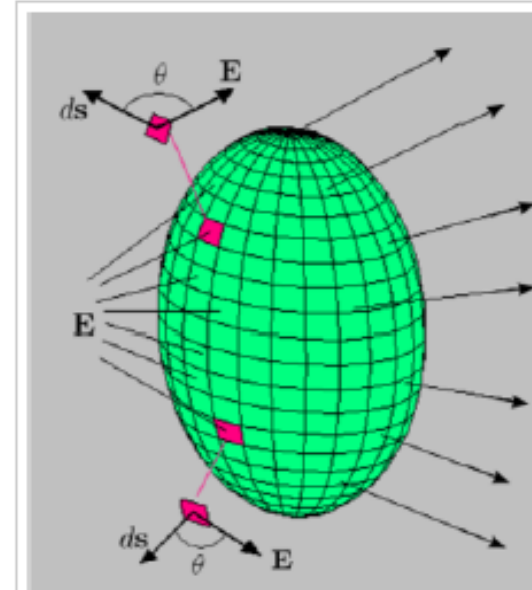
Название	СГС	СИ	Примерное словесное выражение
Закон Гаусса	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$	Поток электрической индукции через замкнутую поверхность \mathbf{s} пропорционален величине свободного заряда, находящегося в объёме \mathbf{v} , который окружает поверхность \mathbf{s} .
Закон Гаусса для магнитного поля	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю (магнитные заряды не существуют).
Закон индукции Фарадея	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	Изменение потока магнитной индукции, проходящего через незамкнутую поверхность \mathbf{s} , взятое с обратным знаком, пропорционально циркуляции электрического поля на замкнутом контуре \mathbf{l} , который является границей поверхности \mathbf{s} .
Теорема о циркуляции магнитного поля	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	Полный электрический ток свободных зарядов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность \mathbf{s} пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре \mathbf{l} , который является границей поверхности \mathbf{s} .

Введённые обозначения:

- S — двумерная замкнутая в случае теоремы Гаусса поверхность, ограничивающая объём V , и открытая поверхность в случае законов Фарадея и Ампера — Максвелла (её границей является замкнутый контур l).
- $Q = \int_V \rho dv$ — электрический заряд, заключённый в объёме V , ограниченном поверхностью S (в единицах СИ — Кл);
- $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$ — электрический ток, проходящий через поверхность S (в единицах СИ — А).

При интегрировании по замкнутой поверхности вектор элемента площади $d\mathbf{s}$ направлен из объёма наружу. Ориентация $d\mathbf{s}$ при интегрировании по незамкнутой поверхности определяется направлением правого винта, «вкручивающегося» при повороте в направлении обхода контурного интеграла по $d\mathbf{l}$.

Словесное описание законов Максвелла, например, закона Фарадея, несёт отпечаток традиции, поскольку вначале при контролируемом изменении магнитного потока регистрировалось возникновение электрического поля (точнее электродвижущей силы). В общем случае в уравнениях Максвелла (как в дифференциальной, так и в интегральной форме) векторные функции \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} являются равноправными неизвестными величинами, определяемыми в результате решения уравнений.



Поток электрического поля через замкнутую поверхность

Численное решение уравнений Максвелла

С развитием вычислительной техники стало возможным решать многие задачи электродинамики численными методами, которые позволяют определить распределение электромагнитного поля при заданных начальных и граничных условиях, используя алгоритмы, основанные на уравнениях Максвелла.

Основными методами являются проекционные, в которых решение проецируется на какой либо удобный функциональный базис, и дискретизационные — область пространства разбивается на множество малых конечных областей.

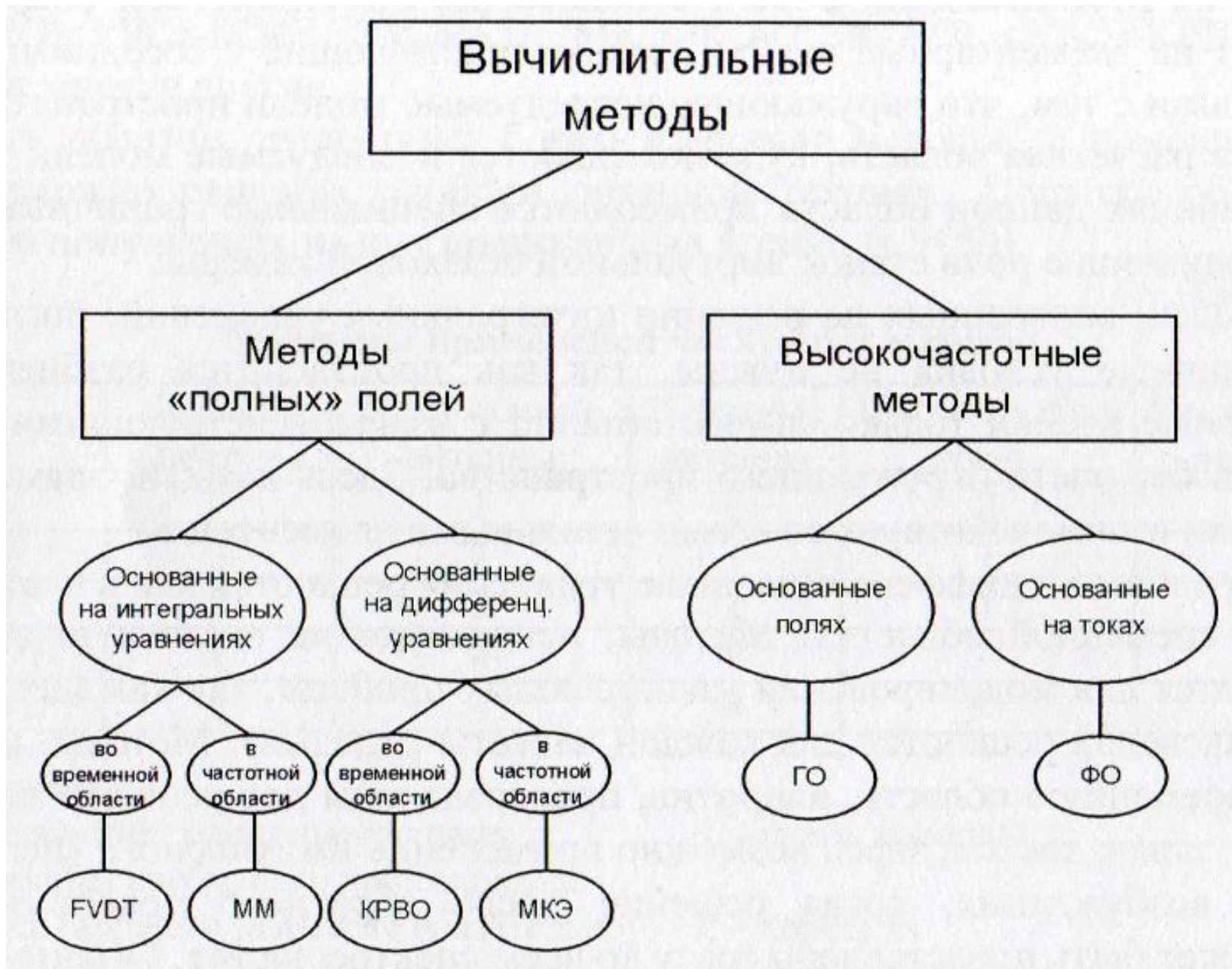
В проекционном методе решение граничной задачи рассматривается в виде приближенного конечного разложения по базисным функциям. После подстановки разложения в исходные уравнения получается система линейных уравнений для коэффициентов разложения.

Для компьютерных расчетов чаще применяются дискретизационные методы:

Метод конечных элементов (FEM), который используется для решения широкого класса задач, сводящихся к уравнениям в частных производных. В методе конечных элементов рассматриваемая область пространства, в которой ищется решение, разбивается на большое число простых дискретных элементов, обычно, но не обязательно, треугольной (в двумерном случае) или тетраэдральной формы (в трёхмерном случае).

Метод конечных разностей во временной области (FDTD) для нахождения временных и спектральных зависимостей был разработан специально для решения уравнений Максвелла, в которых изменение электрического и магнитного поля во времени зависит от изменения этих в пространстве. Полученные из уравнений Максвелла конечноразностные уравнения решаются в каждый последующий момент временной сетки, пока не будет получено решение поставленной задачи на всем требуемом временном интервале.

Вариант классификации численных методов электродинамики



В методах, основанных на решении дифференциальных уравнений, антенну или рассеивающий объект с некоторым пространством вокруг них разделяют на элементарные ячейки, взаимодействующие с соседними ячейками. В связи с тем, что окружающее исследуемые модели пространство бесконечно, а расчетная область, куда помещаются исследуемые модели, конечна, на границах данной области применяются специальные граничные условия, выполняющие роль стенок виртуальной безэховой камеры.

В методах, основанных на решении интегральных уравнений, поглощающие граничные условия не нужны, так как производится разбиение на элементарные ячейки только самого объекта с взаимодействующими с ним объектами без учета окружающего пространства. Здесь каждый элемент общей модели взаимодействует со всеми остальными элементами.

Интегральные и дифференциальные уравнения решаются как в частотной, так и во временной областях. Методы, использующие частотную область, применяются для моделирования узкополосных проблем, так как здесь уравнения Максвелла решаются для каждой частоты отдельно. Методы, использующие временную область, напротив, предназначены для решения широкополосных задач, так как здесь возможно применение импульсного (нестационарного) возбуждения, когда решение после обратного преобразования Фурье может быть представлено сразу во всем спектре частот. Ограничением использования методов во временной области является количество ячеек разбиения.

Наилучшее представление о численных методах электродинамики «полных» полей дают три основных.

1. Метод моментов (ММ) (*Method of Moments (MoM)*, англ.).
2. Метод конечных элементов (МКЭ) (*Finite Element Method (FEM)*, англ.).
3. Метод конечных разностей во временной области (КРВО) (*Finite Difference Time Domain (FDTD)*, англ.).

Представленные методы не являются единственными из используемых в настоящее время. Так, весьма популярный метод конечных объемов во временной области (*Finite Volume Time Domain technique (FVTD)*, англ.) или конечно-интегральный метод (*Finite Integral Technique (FIT)*, англ.) с методом матриц линий передач (*Transmission Line Matrix method (TLM)*, англ.) имеют много общего с КРВО.

Существует некоторая категория гибридных методов, сочетающих сильные стороны представленных выше. Это ММ-ГО (*MoM-UTD*), ММ-ФО (*MoM-PO*), МКЭ-ММ (*FEM-MoM*), МКЭ-ФО (*FEM-PO*) и МКЭ-КРВО (*FEM-FDTD*) и многие другие.

Варианты применения численных методов

Метод	Большие апертуры	Проволочные антенны	Печатные антенны	Поглощающие среды	Резонансные явления
<i>MoM</i>	3	1	2	2	1
<i>FDTD</i>	3	2	1	1	1
<i>FEM</i>	3	2	1	1	2
<i>GO/UTD</i>	1	4	4	3	4
<i>PO/PTD</i>	1	4	4	3	4

1 – очень хороший, 2 – хороший, 3 – применяется иногда, 4 – не применяется

На сегодняшний день существует множество коммерческих и с открытым исходным кодом программ, основанных на вышеперечисленных методах. Яркими представителями коммерческих приложений, позиционирующих себя как профессиональные, являются *FEKO* (ММ, МКЭ, КРВО, ФО, ГО), *ANSYS HFSS* (МКЭ) и *XFDTD* (КРВО) и др. Данные программы имеют дружелюбный пользовательский интерфейс, защиту от некорректных действий пользователя и большой набор моделей, используемых в качестве примеров. Представители программ с открытым исходным кодом разработаны не так хорошо: это *NEC* (ММ), *OpenEMS* (КРВО) и некоторые другие. Отдельно позиционируются программы, предназначенные для научных расчетов, например *COMSOL-Multiphysics* (МКЭ).

Вопрос 2

Метод моментов (ММ)

Метод моментов (*Method of Moments, MoM*) впервые описан в середине прошлого века. Данный метод является одним из первых численных методов электродинамики. Он используется для решения интегральных уравнений, применительно как к сплошным проводящим, так и к тонкопроволочным излучающим (а позже и рассеивающим) системам.

Данный метод весьма широко используется и в настоящее время. На его основе написано множество коммерческих и некоммерческих программ и алгоритмов, он весьма эффективен для проводящих тел, для проволочных структур, произвольно ориентированных в пространстве. С его помощью стало возможным находить, например, распределение тока по прямолинейным или плавно изогнутым проводникам, характеристики направленности, коэффициенты усиления и входные сопротивления проволочных антенн, влияние объектов на форму характеристики направленности. Математическое обоснование данного метода неразрывно связано с классическими методами, такими как метод наводимых ЭДС, теория длинных линий и т.д.

Принцип действия метода моментов (ММ) связан с общим для всех сеточных методов процессом дискретизации излучающей структуры, применением базисных и пробных функций различных видов (в том числе и метода Бубнова – Галеркина) с целью приведения исходного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решением которой является вектор неизвестных токов сегментов, на которые разбивается математическая модель излучающей системы. При этом для нахождения формы диаграммы направленности (ДН) возможно использование модели возбуждения в виде бесконечно тонкого зазора, характерного для уравнения Галлена. Для нахождения более сложных вторичных характеристик, таких как входное сопротивление (проводимость) наилучшим образом себя проявляет модель возбуждения в виде кольцевого магнитного тока, применение которой возможно, например, в уравнении Поклингтона.

Базовой частью метода является формирование так называемой «матрицы взаимных сопротивлений», учитывающей взаимное расположение взаимодействующих сегментов, на которые разбивается излучающая система (ИС) и учет граничных условий (ГУ) для касательных составляющих вектора электрического поля на идеальном проводнике в зависимости от ориентации ИС в пространстве. Вектор правых частей СЛАУ учитывает влияние источника (модели возбуждения) на один или несколько сегментов. При этом матрица импедансов является квадратной, должна быть хорошо обусловлена для исключения сингулярности и обеспечения хорошей сходимости решения.

Существуют три основные формы записи интегральных уравнений, решаемых методом моментов.

1. Интегральное уравнение для напряженности электрического поля (ИУЭП)

$$\mathbf{e}_n \times \int_{S'} G(r, r') \left[\mathbf{J}_s^e(r') + \frac{1}{k^2} \nabla' (\nabla' \cdot \mathbf{J}_s^e(r')) \right] dS' = \frac{1}{ik\eta_0} \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}^i(r). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) является сингулярным интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода относительно неизвестной поверхностной плотности электрического тока \mathbf{J}_s^e .

2. Интегральное уравнение для напряженности магнитного поля (ИУМП)

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{H}^i(r) = \frac{1}{2} \mathbf{J}_s^e(r) + \left[\mathbf{e}_n \times \int_{S'-\delta S} \nabla' G(r, r') \times \mathbf{J}_s^e(r') dS' \right]. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) является сингулярным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода относительно той же неизвестной плотности поверхностного электрического тока \mathbf{J}_s^e . Уравнение неприменимо для открытых (незамкнутых) поверхностей и тонких объектов.

3. Интегральное уравнение смешанных векторного и скалярного потенциалов (ИУСП)

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}^i(r) = \mathbf{e}_n \times \left[i\omega\mu \int_{S'} G(r, r') \times \mathbf{J}_s^e(r') dS' - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla \int_{S'} G(r, r') \times \mathbf{J}_s^e(r') dS' \right]. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) является сингулярным интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода относительно неизвестной плотности поверхностного электрического тока \mathbf{J}_s^e .

Идея метода моментов заключается в сведении исходного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений с N неизвестными, представляющих собой некие разложения для тока. Такой подход позволяет производить электродинамический анализ только излучающей поверхности (без необходимости дискретизации ограничивающего ее пространства), что существенно экономит машинные ресурсы. Это преимущество, несмотря на всестороннюю изученность метода, позволяет оставаться ему актуальным.

Если рассмотреть произвольное металлическое тело с распределением плотности поверхностного тока \mathbf{J} , то согласно граничным условиям для идеального проводника, на поверхности тела касательные составляющие полного поля (суммы падающего и рассеивающего полей) должны быть равны

$$\mathbf{E}_\tau^i + \mathbf{E}_\tau^s = 0,$$

где \mathbf{E}_τ^i – касательная к поверхности тела составляющая падающего (внешнего) поля, \mathbf{E}_τ^s – касательная к поверхности тела составляющая рассеянного поля (поля, создаваемого самим телом). Таким образом, величина \mathbf{E}_τ^i является причиной, а \mathbf{E}_τ^s – реакцией электродинамической системы на внешнее воздействие и выражение (1.8) можно переписать как

$$-\mathbf{E}_\tau^s = \mathbf{E}_\tau^i.$$

Введя оператор

$$L_{\text{оп}}(\mathbf{J}) \equiv -\mathbf{E}_\tau^s,$$

можно воспользоваться теорией линейных векторных пространств и записать уравнение в операторном виде

$$L_{\text{оп}}(\mathbf{J}) = \mathbf{E}_\tau^i.$$

Решение задачи производится в четыре этапа.

1. Неизвестный вектор \mathbf{J} разлагается в ряд по базисным функциям.

2. Определяется внутреннее скалярное произведение и устанавливается система весовых (пробных) функций.

3. Вычисляются внутренние произведения и уравнение приводится к матричному виду (СЛАУ).

4. Решается СЛАУ и находятся неизвестные коэффициенты разложения.

Выбор той или иной базисной функции диктуется, в основном, формой рассчитываемой излучающей поверхности. Если антенна проволочная либо состоит из прямолинейных проволочных ячеек, на которых берется текущая координата z , то можно применить следующие базисные функции:

кусочно-постоянные (импульсные)

$$u_n(z) = \begin{cases} I_j & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j; \\ 0 & \text{вне этой области;} \end{cases}$$

кусочно-линейные

$$u_n(z) = \begin{cases} \frac{I_j(z_{j+1} - z) + I_{j+1}(z - z_j)}{\Delta z_j} & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j; \\ 0 & \text{вне этой области;} \end{cases}$$

кусочно-синусоидальные

$$u_n(z) = \begin{cases} \frac{I_j \sin k(z_{j+1} - z) + I_{j+1} \sin k(z - z_j)}{\sin k \Delta z_j} & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j; \\ 0 & \text{вне этой области;} \end{cases}$$

базисные, основанные на различных видах интерполяции.

Физический смысл базисных функций прямоугольной ячейки заключается в их представлении в виде элементарных плотностей тока на ограниченной поверхности.

Для ячеек треугольной формы, в последнее время нашли применение так называемые базисные функции RWG. Здесь каждая базисная функция ассоциируется с внутренним ребром, общим для двух соседних треугольников и равна нулю вне его.

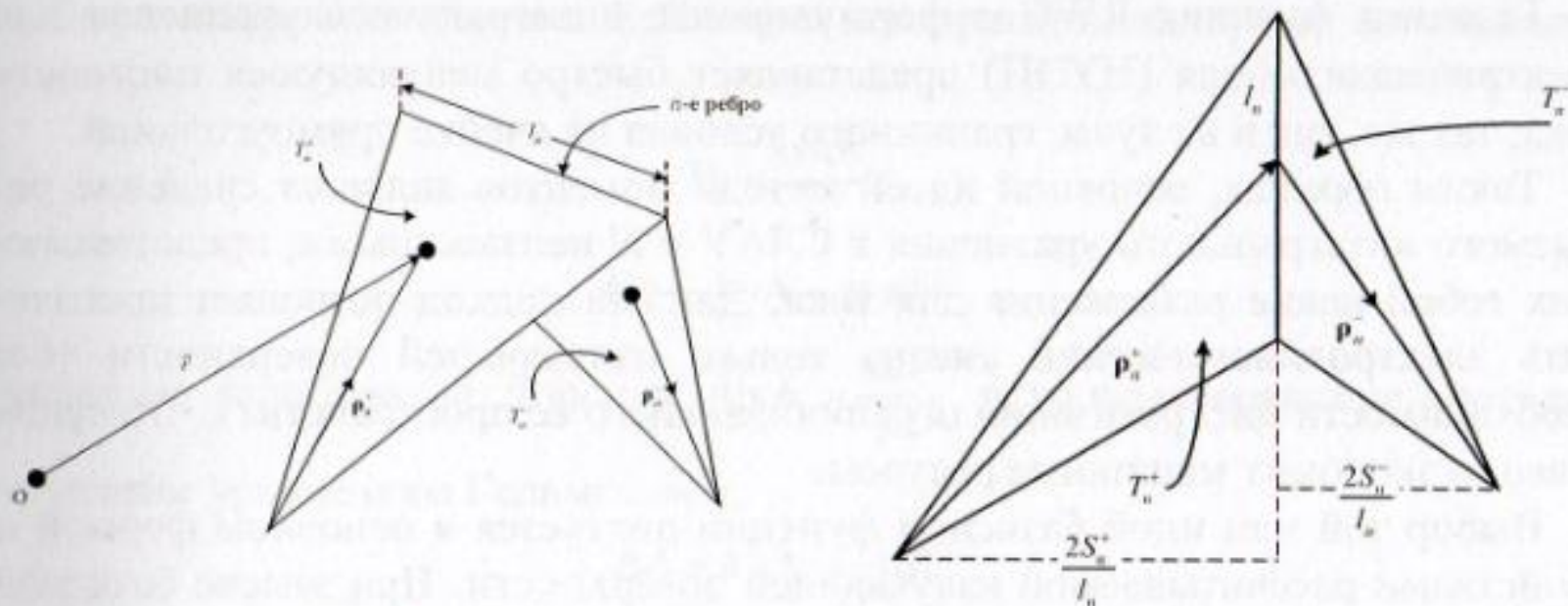


Рис. Локальные координаты, ассоциированные с ребром

Базисная функция RWG является разновидностью векторных базисных функций. Она не равна нулю на общем ребре двух смежных треугольников сетки дискретизации. Данное n -е ребро в отличие от наружного рассчитываемый объект не «закрывает» (см. рис.).

Метод моментов является численным методом решения интегральных уравнений и не требует дискретизации пространства, окружающего исследуемую излучающую систему. На современном этапе появилась возможность не только рассчитывать проводящие поверхности, но и учитывать различного рода примыкающие тонкослоистые неоднородности. Отдельным вариантом применения метода является формирование единичных объемных элементов с различными параметрами заполняющей их среды, т.е. возможность рассчитывать неоднородные объекты произвольной геометрии с помощью решения интегральных уравнений.

Перечисленные достоинства метода выделяют его на фоне, например, метода конечных элементов или метода конечных разностей во временной области. Тем не менее данные методы применяются в тех задачах, где возможностей интегральных уравнений становится недостаточно, например в задачах, где критична точная аппроксимация геометрии или неоднородности имеют пространственный разрыв с излучателем. Нет возможности рассчитывать методом моментов объекты, помещенные внутрь неоднородных сред, т.е. непосредственно, так как здесь уже требуется решать дифференциальные уравнения.

Вопрос 3

Метод конечных элементов (МКЭ)

Успехи рассмотренного метода моментов дали мощный импульс развитию альтернативных численных методов решения задач электродинамики. Одним из них является метод конечных элементов (МКЭ), долгое время развивавшийся параллельно с методом моментов, так как изначально был предназначен для решения задач строительной механики.

Метод конечных элементов возник в середине XX в. как метод решения уравнений в задачах теории упругости и механики сплошных сред. Изначально он был основан только на вариационных принципах, заключающихся в поиске минимума специальной интегральной функции, называемой функционалом. Вариационное исчисление связано с отысканием стационарных значений функционалов, представляющих собой определенные интегралы от специальным образом построенных функций и принимающих числовое значение при подстановке каждой конкретной функции в подынтегральное выражение. Основная задача вариационного исчисления состоит в отыскании такой функции $F(x)$, чтобы при произвольном бесконечно малом ее изменении (вариации функционала) $\delta F(x)$ его величина оставалась неизменной, т.е. функционал принимал постоянное значение.

Недостатком вариационных методов являются трудности успешного подбора координатных функций. Их разнообразие и большие значения процедур и созданию достаточно универсального программного обеспечения, ориентированного на анализ широкого класса проектируемых конструкций. Этот недостаток в значительной мере устранен в МКЭ.

Главная особенность МКЭ, отличающая его от других вариационных методов, состоит в использовании сплайновой аппроксимации. В МКЭ вся исследуемая область разделяется на конечные элементы.

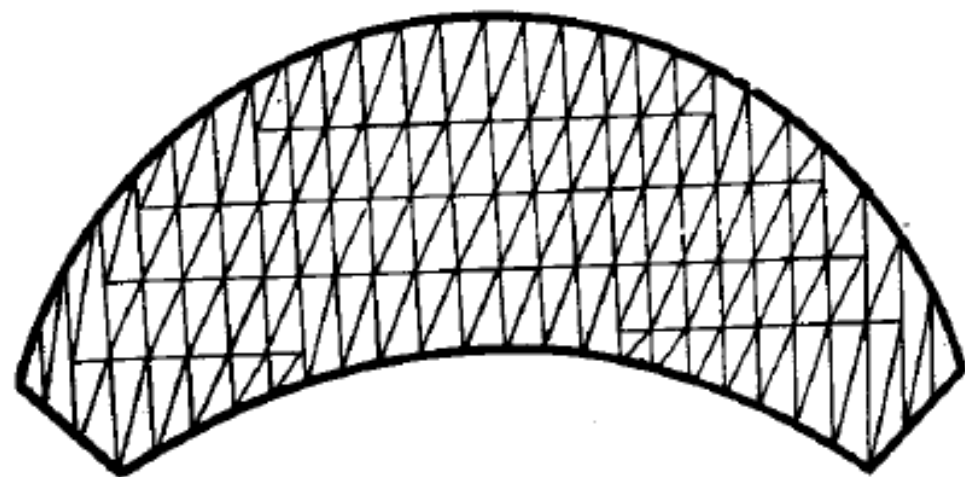


Рис. . Пример разделения плоской детали на конечные элементы

В двумерных задачах конечные элементы обычно выбираются в виде треугольников или четырехугольников, в трехмерных задачах имеют форму тетраэдра или параллелепипеда. Так, на рис. показан часто используемый вариант выделения треугольных конечных элементов в плоских деталях.

Метод конечных элементов, в отличие от метода моментов, в программировании довольно сложен. Это вызвано, в первую очередь, трудностями представления конечноэлементной сетки. Однако применимость метода для решения широкого круга задач привела к тому, что развитие его ведется целыми научно-исследовательскими институтами с высококвалифицированным штатом сотрудников.

На сегодняшний день существует две разновидности метода: классический узловой и векторный МКЭ. Ограничением узлового МКЭ является его неустойчивость при решении векторных задач, в которых рассматриваются неоднородные среды, так как возникают существенные сложности в реализации граничных условий для векторов поля при переходе от среды к среде с резко меняющимися параметрами. Тем не менее любые скалярные задачи (задачи электродинамики, которые можно представить в скалярной форме) узловым МКЭ решаются весьма эффективно.

Концепция узлового метода конечных элементов

Любая электродинамическая задача в основном формулируется как краевая. Она состоит в нахождении такого распределения ЭМП, которое в данной части пространства удовлетворяет уравнениям Максвелла, а на границе области – одному из краевых условий, при которых может быть доказана теорема единственности [11]. Рассмотрим некоторую расчетную область $\bar{\Omega}$, представляющую собой сумму $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, где Γ – граница, ограничивающая поверхность (объем) Ω [12]. В данной области необходимо решить дифференциальное уравнение. Для этого необходимо проделать следующие шаги:

1. Область $\bar{\Omega}$ разбивают на подобласти в количестве E штук ($e = \overline{1, E}$), называемых **конечными элементами**, такие, что

$$\Omega = \sum_{e=1}^E \Omega^e, \Gamma = \sum_{e=1}^E \Gamma^e.$$

Дифференциальная задача сначала решается для отдельного обобщенного элемента, имеющего обобщенные декартовы координаты.

2. Каждый конечный элемент представляется системой **узлов**, каждый из которых нумеруется своим порядковым номером специальным образом. В треугольном элементе первого порядка узлы находятся в его вершинах и их количество равно трем, в тетраэдральном элементе первого порядка – четырем. В данных узлах находится искомая величина.

3. Каждому нумерованному узлу приписывается своя **базисная функция**, равная единице именно в своем узле и нулю в других. Значения базисных функций будут зависеть от декартовых координат узлов. Их количество в модели равно числу узлов. Обязательным условием выбора базисных функций является условие их **ортогональности** по всей расчетной области.

4. Искомая величина в конечном элементе представляется в виде суммы произведений базисных функций на неизвестные постоянные множители, величину которых необходимо найти. Данное представление дает решение, называемое **приближенным**.

5. Решение подставляется в исходную дифференциальную задачу. Поскольку решение приближенное, оно, естественно, будет неточным. Результатом такой подстановки будет не тождественный нуль, а некоторая **функциональная невязка** (ошибка интерполяции), которую необходимо минимизировать.

6. Минимизация невязки достигается применением специальных методов *взвешенных невязок* Галеркина: невязки скалярно умножаются на специально подобранные **весовые функции** (в методе Галеркина они равны базисным) и приравниваются к нулю. Из математики известно, что скалярное произведение от непрерывных функций равно определенному интегралу по расчетной области от произведения этих функций. В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в нумерованных узлах.

7. Определенные интегралы по всей расчетной области заменяются суммой интегралов по отдельным конечным элементам, для чего сначала составляются матрицы СЛАУ для отдельных элементов (с учетом граничных условий, если элемент является граничным), а затем все матрицы СЛАУ элементов суммируются (ансамблируются) специальным образом в одну общую **глобальную** СЛАУ по всей расчетной области. Поскольку базисные функции являются ортогональными, глобальная СЛАУ получается сильно разреженной с ненулевыми элементами, расположенными в окрестности главной диагонали.

8. СЛАУ решается относительно узловых значений искомой функции каким либо из известных методов (например, Гаусса). Следует отметить тот факт, что в МКЭ решение можно получить не только в узловых точках, так как используя базисные функции элементов, можно получить интерполированное решение во всех точках расчетной области, поэтому решение на каждом элементе получается в виде непрерывных (или гладких) функций.

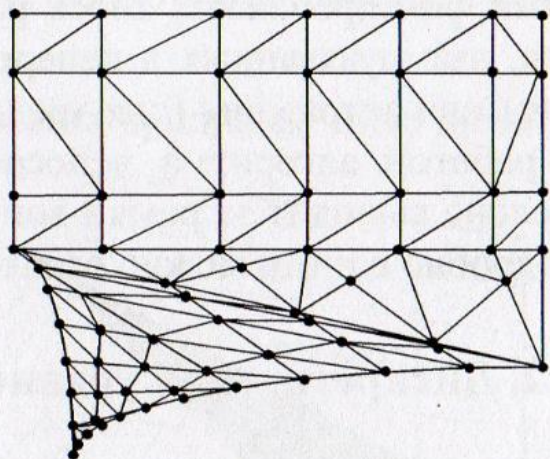


Рис. [] . Деление модели на треугольные и четырехугольные зоны с последующим разбиением на треугольные элементы

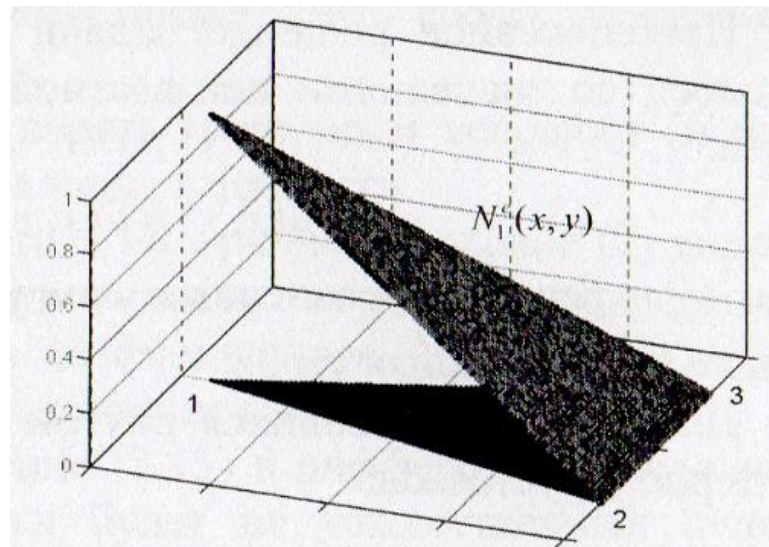


Рис. [] . Базисная функция $N_i^e(x, y)$

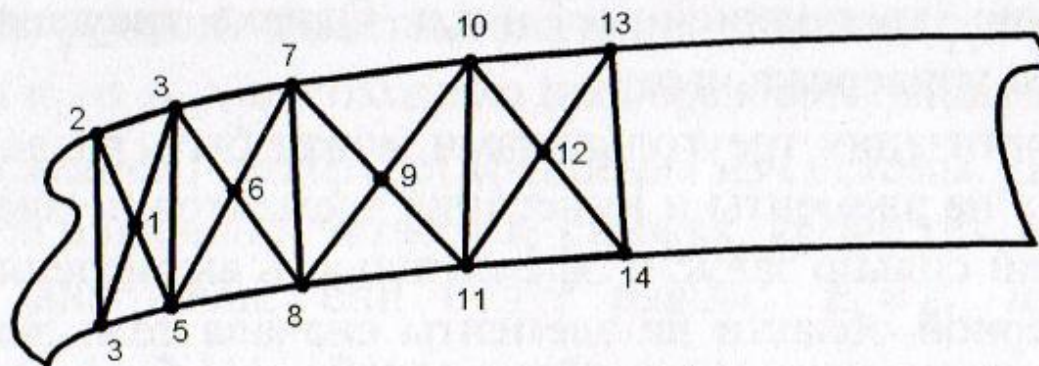
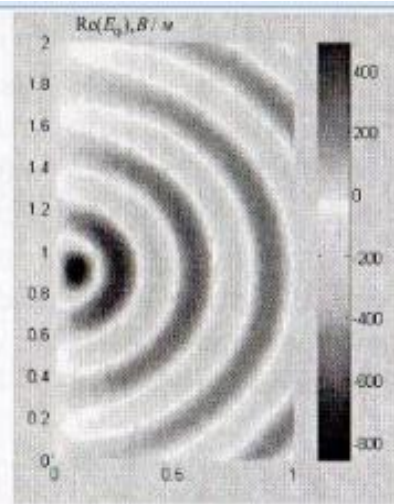
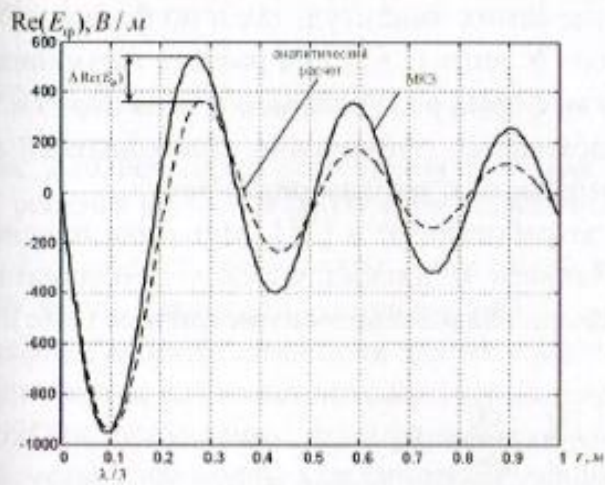


Рис. [] . Правильное разбиение тонкостенной расчетной области



б

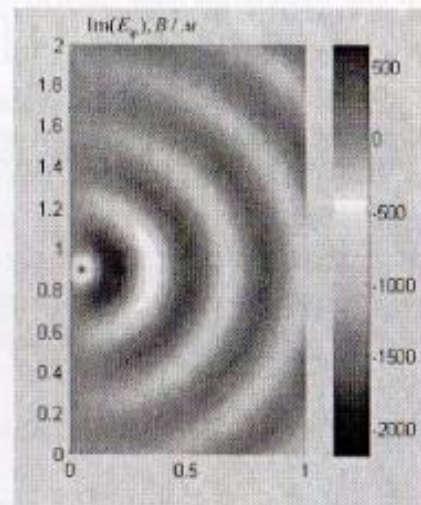
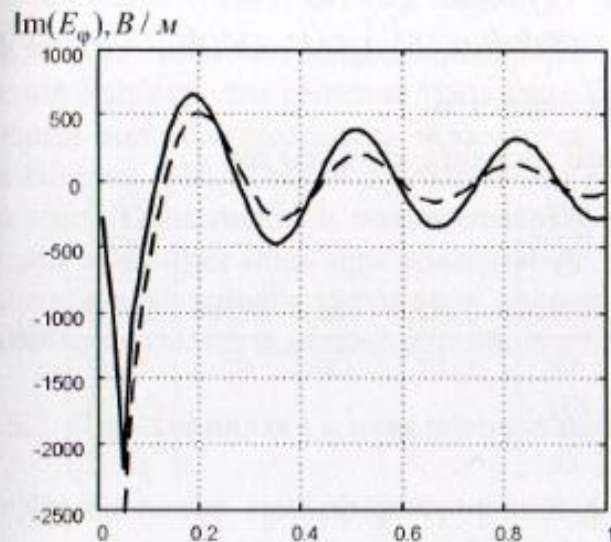


Рис. Результаты расчета классическим двумерным МКЭ:
 а – действительной компоненты электрического поля ЭМД радиусом $a = 0,05$ м в направлении максимума излучения (слева);
 в виде амплитуды E_{φ} , распределенной в расчетной области (справа);
 б – мнимой компоненты электрического поля ЭМД радиусом $a = 0,05$ м в направлении максимума излучения (слева);
 в виде амплитуды E_{φ} , распределенной в расчетной области (справа)

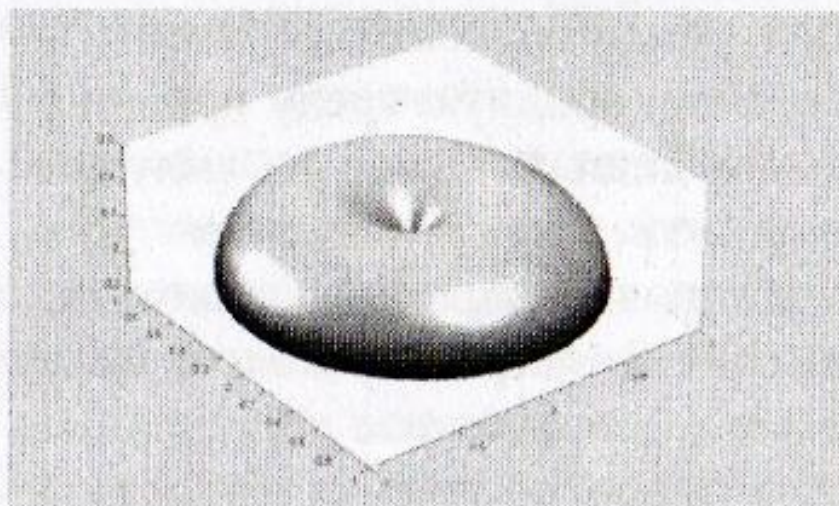


Рис. . Трехмерная ДН $\lambda/4$ несимметричного вибратора над бесконечной идеально проводящей поверхностью

Для несимметричных антенн вполне достаточно ограничиться углами $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, что экономит время расчетов. Рассчитанный из трехмерной ДН (рис.), в максимуме излучения КУ несимметричного вибратора принял значение, равное 3,2, что соответствует строгой теории.

Таким образом, МКЭ обладает достаточной точностью и позволяет проводить расчеты диаграмм направленности любых несимметричных антенн.

Метод конечных элементов, как и метод моментов, может с успехом применяться в различных задачах электродинамики. Однако, как и у любого другого метода, у него есть свои достоинства и недостатки. Например, если сравнивать его с методом моментов, то в МКЭ появилась возможность учета любых неоднородностей, находящихся в электрической близости к исследуемой модели излучателя. При этом появилась возможность проводить анализ влияния таких неоднородностей на параметры рассчитываемой системы.

Метод конечных элементов может применяться для достаточно обширного списка номиналов частот: размер элементарной ячейки привязывается к длине волны. Появилась возможность моделирования не только излучателя, но и линии его питания, вне зависимости от ее типа (волновод, микрополосковая линия, коаксиальный кабель, симметричная линия и др.). Это делается для исследования влияния линии передачи на диаграмму направленности и другие антенные характеристики.

Метод конечных элементов позволяет моделировать антенные решетки, сложные интегрированные схемы с излучающими частями, пассивные СВЧ-устройства. Универсальность уравнений метода конечных элементов позволяет решать даже мультифизические задачи, например влияние температуры окружающей среды на некоторые характеристики антенн.

Метод всегда ограничен наличием расчетной области определенного размера, т.е. для решения объемных задач требуется большой ресурс ЭВМ; поэтому в случае моделирования электрически больших и сложных антенных систем (например, зеркальных антенн) метод становится неэффективным.

Кроме того, задачи, в которых разница в размерах конечных элементов составляет несколько порядков, могут вообще быть неразрешимыми, так как сходимость метода зависит от соотношения размеров конечной ячейки и длины волны (расчет тонких погруженных в неоднородную среду проводов, метаматериалов). Методом моментов, учитывая лишь поверхность излучающей системы, возможно решать такие задачи, ведь при определенных условиях тонкопроволочная аппроксимация может применяться и к сплошным металлическим поверхностям, а электрические размеры проволок могут варьироваться в широких пределах. Кроме того, современные варианты метода моментов могут учитывать даже неоднородности, являющиеся частью антенной системы.

Исследование переходных процессов также остается за гранью возможностей МКЭ. Учет нестационарных источников для МКЭ требует расчета на большом числе номиналов частот и дальнейшего преобразования Фурье, что существенно уменьшает точность и замедляет процесс расчета.

Вопрос 4

**Метод конечных разностей во
временной области (МКРВО)**

Рассмотренные метод моментов и метод конечных элементов на первый взгляд могут полностью удовлетворить потребности исследователя при решении электродинамических задач. Однако существуют задачи, в которых требуется задавать четвертый тип моделей возбуждения: импульсный (нестационарный) источник. Кроме прочего,

сложность в постановке граничных условий при резком переходе ЭМВ от среды с одними параметрами к среде с другими параметрами может породить проблему «ложных» решений (при некоторых условиях).

Моделирование разворачивающегося во времени процесса дифракции, анализ переходных процессов в антеннах и другие временные процессы вызывают некоторые трудности, поскольку и ММ и МКЭ моделируют уже установившиеся колебания на определенной частоте. Выходом является расчет полей на множестве частот и дальнейшее преобразование Фурье для перехода во временную область. Данный способ хорошо работает и для ММ и для МКЭ, но требует постоянного обновления сеточного разбиения, хорошо согласующегося с новой длиной волны. Каждый раз приходится решать СЛАУ весьма внушительной размерности (в некоторых задачах), что приводит к повышенным требованиям к быстродействию компьютера, так как обращение матриц требует серьезного вычислительного ресурса.

Все вышеперечисленные проблемы могут быть с легкостью решены при использовании метода конечных разностей во временной области (КРВО) (*Finite Difference Time Domain Method, FDTD*, англ.). Данный метод берет свое развитие от простейшего сеточного метода конечных разностей – одного из первых численных методов, появившегося примерно в одно и то же время, что и ММ. Достоинствами КРВО являются одинаковая легкость его работы и с гармоническими, и с нестационарными источниками, несравнимо большая по сравнению с тем же МКЭ, наглядность и легкость программирования в трехмерном пространстве, возможность моделирования любых сред с любыми параметрами в любых комбинациях, нахождение векторов ЭМП непосредственно в процессе счета, а не в постпроцессорной обработке (как в МКЭ), что исключает операции численного дифференцирования (или интегрирования) и т.п. Несомненно, КРВО, как и все численные методы, является приближенным, но, как и для других методов, степень приближения можно брать сколь угодно близкой к точному решению, всё зависит только от объема оперативной памяти и потраченного времени счета. Разумеется, КРВО имеет и некоторые недостатки, такие как повышенные требования к объему оперативной памяти, ограничивающие общую размерность задачи (относительно длины волны), сложности, возникающие при решении внешних задач электродинамики (объем с моделью также ограничивается расчетной областью, а на границах необходимо ставить ПГУ), необходимость достаточно большого числа пройденных временных шагов для получения качественного спектра входных напряжений, сложности при распараллеливании процессов, так как последующий шаг алгоритма всегда зависит от предыдущего, и многое другое.

Основой КРВО являются первые два уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Эти уравнения выражаются в линеаризованной форме при помощи математического аппарата центральных конечных разностей. Поля рассчитываются постепенно от временного шага к шагу, ячейки сеточного разбиения могут быть в виде параллелограммов, кубов. Другие виды сеток, в том числе двумерные и одномерные, также возможны.

Для решения любой задачи методом КРВО необходимо осуществить преобразования уравнений Максвелла к виду, пригодному для данного метода

. Рассмотрим область пространства с распределенными по нему источниками ЭМП; пространство включает в себя электрические и магнитные материалы с потерями. Для учета магнитных потерь можно определить плотность эквивалентного магнитного тока:

$$\mathbf{M} = \rho' \mathbf{H},$$

для учета электрических потерь – плотность эквивалентного электрического тока:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Здесь ρ' эквивалентно магнитному сопротивлению в омах на метр, а σ – электрической проводимости в сименсах на метр. Таким образом, можно записать:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\rho'}{\mu} \mathbf{H};$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}.$$

Выведем векторные компоненты данных вихревых уравнений. Они образуют систему из шести скалярных уравнений в трехмерной декартовой системе координат:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho' H_x \right);$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho' H_y \right);$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho' H_z \right);$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right);$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right);$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right).$$

Данная система из шести дифференциальных уравнений в частных производных является основой для алгоритма КРВО. В случае рассмотрения двумерного или одномерного пространства система лишается части членов и значительно упрощается.

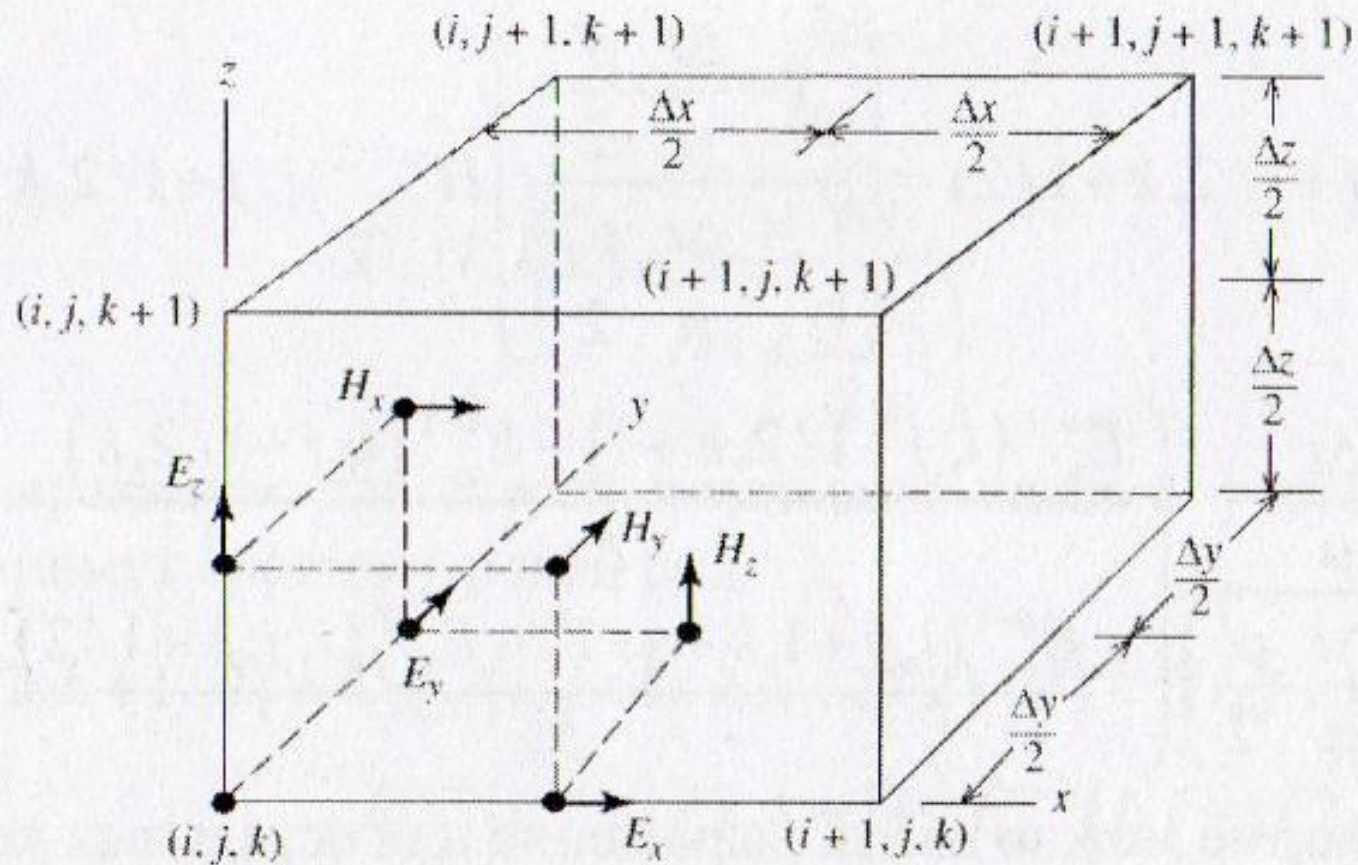


Рис. Позиции компонент электрического и магнитного полей в кубической КРВО-ячейке размером Δx , Δy , Δz

Главной особенностью метода КРВО является выполнение внешнего цикла по времени. До этого этапа уже должны быть сформированы сетки вычисленного размера, определен временной шаг, вычислены постоянные коэффициенты, такие как C_a , C_b , D_a , D_b , определено состояние источника возбуждения. С помощью данных коэффициентов уже должны быть присвоены электрические параметры анализируемым средам (всем, кроме свободного пространства), сформированы массивы для записи вычисляемых характеристик ЭМП. Наличие данного этапа существенно уменьшает время, необходимое для численного решения задачи.

Таким образом, написанный код должен содержать несколько важных шагов.

1. Препроцессорная обработка исходных данных:
 - инициализация сетки КРВО, выбор числа ячеек, их размерности и размера;
 - вычисление временного шага, обеспечивающего условие устойчивости и численной сходимости Куранта (3.17);
 - вычисление постоянных множителей C и D , служащих для определения исследуемой модели антенны или рассеивающего тела.

2. Цикл по времени:

обновление состояния источника возбуждения;

вычисление близлежащих к источнику (формирующих начальную компоненту вектора E) компонент вектора E ;

обновление состояния наложенных поглощающих граничных условий, служащих для устранения нефизических отражений уходящих в бесконечность волн от границы расчетной области;

обновление компонент вектора H .

3. Постпроцессорная обработка результатов расчета:

считывание из массивов необходимых данных, таких как компоненты ЭМП, вычисление токов, напряжений и т.п.;

определение касательных компонент ЭМП к фиктивной поверхности, окружающей антенну или рассеиватель для определения полей рассеяния или поля в дальней зоне излучателя.

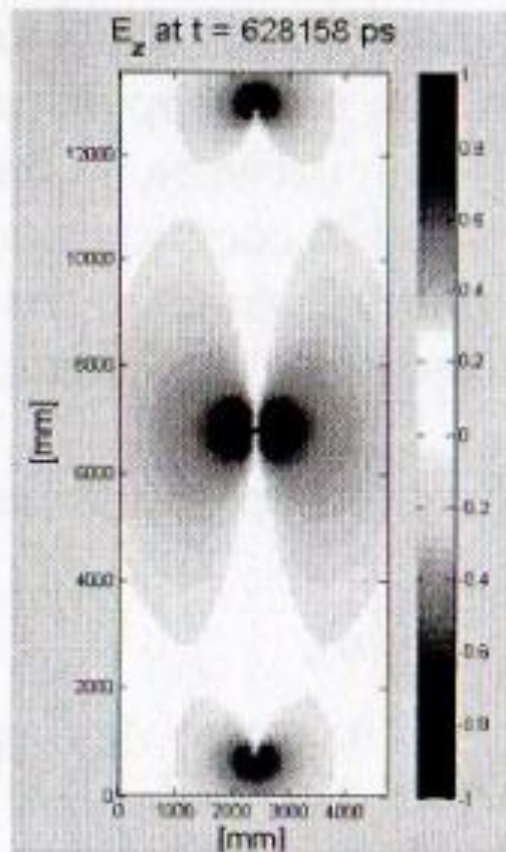
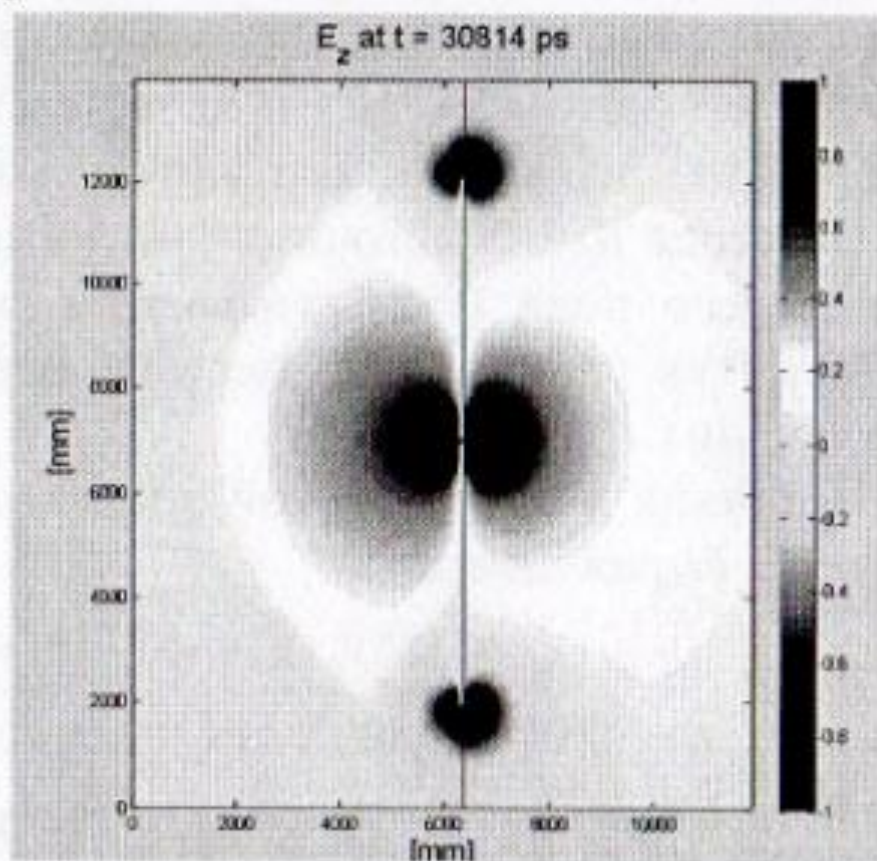
a*б*

Рис. . Симметричный вибратор на двухслойной поверхности, возбуждаемый гармоническим источником: *a* – в плоскости yz ; *б* – в плоскости xz

Конечно-разностные уравнения могут легко трансформироваться для различных размерностей анализируемого пространства, при этом различного рода неоднородности моделируются довольно просто. В случае применения *PML* число уравнений увеличивается, равно как и увеличивается размерность задачи. Однако выигрыш, получаемый за счет возможности довольно радикального усечения сетки, делает применение *PML* в КРВО просто необходимым.

Вычислительная схема метода состоит из простых шагов. При этом существует возможность некоторого ускорения алгоритма за счет заблаговременного нахождения постоянных коэффициентов, не изменяющихся в процессе счета. На сегодняшний день предложены многие программные доработки, позволяющие, например, вычислять не всю КРВО-сетку, а только те ячейки, где поле не равно нулю, что также экономит машинные ресурсы. Однако возможности распараллеливания для КРВО крайне ограничены, так как нахождение поля на текущем шаге зависит от поля, полученного на предыдущем шаге. Данный факт существенно ограничивает развитие метода, так как исследователям необходимо решать задачи всё большей и большей размерности.

Модели источников, используемые в методе КРВО, являются крайне интересными с точки зрения развития теории радиосвязи и радиолокации. Правильное применение нестационарного возбуждения открывает широкие возможности для исследователя. Кроме того, анализ переходных процессов, пожалуй, возможен только в КРВО.

Метод КРВО по праву занимает свою нишу в совокупности численных методов электродинамики. Высокий интерес к нему со стороны исследователей говорит о том, что его научный потенциал еще далеко не исчерпан.

Конец лекции